Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 28, N. 1, 1-42

Pavages auto-affines, opérateurs de transfert et critères de réseau dans $\mathbb{R}^d$

J.-P. Conze, L. Hervé et A. Raugi

Abstract. We applied results from [**2**] to multiresolution analysis and to lattice tilings of $\mathbb{R}^d$ with self-affine tiles.

Resumé. Nous appliquons les résultats de [**2**] à la construction d'analyses multirésolutions et en particulier à l'étude de pavages auto-affines de $\mathbb{R}^d$. Nous montrons qu'une tuile auto-affine, construite à partir d'une matrice dilatante à coefficients entiers, permet de paver $\mathbb{R}^d$ par translation par les éléments d'un réseau.

0. Introduction

Pour une large part, la théorie des analyses multirésolutions développée notamment dans les travaux de Y. Meyer, I. Daubechies, S. Mallat, est maintenant classique, et formellement son extension en dimension d n'est pas essentiellement différente de la dimension 1. Par contre, les critères apparaissant dans les constructions, par exemple l'obstruction à l'orthogonalité, conduisent à des problèmes de nature algébrique plus difficiles qu'en dimension 1. Ces problèmes sont bien illustrés par l'étude des pavages de $\mathbb{R}^d$ par les ensembles auto-affines associés à une matrice dilatante à coefficients entiers A, cas particulier d'analyse multirésolution de dimension d ([**7**], [**8**]).

Nous montrons ici comment les résultats obtenus dans [**2**] s'appliquent à la construction des analyses multirésolutions, en fournissant sous une forme algébrique un critère assurant la propriété d'orthogonalité ou de base de Riesz pour les fonctions d'échelles correspondantes. Dans le cas des pavages auto-affines, il nous permet d'établir le résultat principal de ce travail: la possibilité d'obtenir un pavage de $\mathbb{R}^d$ à l'aide des ensem-

Received 5 January 1996.

bles translatés d'une "tuile auto-affine" par un réseau (théorème 4.1).

Cet article doit beaucoup aux travaux de K. Gröchenig et A. Haas [**7**], K. Gröchenig et W. R. Madych [**8**], J. C. Lagarias et Y. Wang [**13**], [**14**], sur les pavages auto-similaires. Nous remercions également le rapporteur de cet article pour ses remarques.

Plan de l'article

I. Ensembles auto-affines et pavages de $\mathbb{R}^d$

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques résultats sur les pavages auto-affines, en nous inspirant largement des références [**7**], [**8**], [**13**], [**14**]. Sur les pavages auto-affines, on pourra également consulter, parmi d'autres travaux, [**1**], [**18**].

I.1 Généralités sur les pavages auto-affines

Considérons une matrice carrée A inversible $d \times d$, à coefficients réels, *dilatante*, c'est-à-dire telle que ses valeurs propres soient toutes de module strictement supérieur à 1. Nous choisissons une norme sur $\mathbb{R}^d$ pour laquelle A^{-1} est contractante.

Soit $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_q\}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^d$. Dans la suite, nous ferons l'hypothèse

$$q = card\mathcal{T} = |\det(A)|.$$

Formons l'ensemble

$$Q(A, \mathcal{T}) = Q = \{x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{n=1}^{\infty} A^{-n} x_n, x_n \in \mathcal{T},\ \forall n \geq 1\}. \qquad (1.1)$$

Cet ensemble est un compact de $\mathbb{R}^d$, image de l'espace $\mathcal{T}^{\mathbb{N}^*}$ (muni de la topologie produit) par l'application continue qui, à une suite $(x_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}^*}$, associe le point

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A^{-n} x_n$$

de $\mathbb{R}^d$. Il vérifie

$$AQ = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (Q + t). \tag{1.2}$$

L'ensemble Q est l'unique point fixe de l'application définie sur l'espace $\mathcal{K}$ des compacts de $\mathbb{R}^d$ par

$$\chi: K \mapsto \chi(K) = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (A^{-1}K + A^{-1}t).$$

Cette application est contractante, quand on munit $\mathbb{R}^d$ de la métrique δ_c associée à la norme contractée par A^{-1} et $\mathcal{K}$ de la distance de Hausdorff $\delta_{\mathcal{K}}$ correspondante:

$$\delta_{\mathcal{K}}(K, K') = \sup_{x \in K, x' \in K'} (\delta_c(x, K'), \delta_c(x', K)).$$

Notons m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. L'ensemble Q vérifie la propriété *d'auto-affinité*, si la réunion dans la relation (1.2) est une réunion d'ensembles *essentiellement disjoints*:

$$m((Q + t) \cap (Q + t')) = 0, \ \forall t, t' \in \mathcal{T}, t \neq t'.$$

Si cette condition est vérifiée, on écrira

$$AQ = \bigsqcup_{t \in \mathcal{T}} (Q + t). \tag{1.3}$$

Il est clair qu'une condition nécessaire sur A et $\mathcal{T}$ pour avoir (1.3) avec un ensemble Q de mesure $m(Q) > 0$ est que le nombre q d'éléments de $\mathcal{T}$ soit égal à $|\det(A)|$. Ce déterminant est donc dans ce cas un entier. Inversement, si $card\mathcal{T} = q = |\det(A)|$, l'égalité

$$AQ = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (Q + t)$$

implique qu'il s'agit d'une union essentiellement disjointe (intersections négligeables), mais il n'est pas assuré que Q soit de mesure de Lebesgue $m(Q) > 0$.

La propriété (1.3) (translatés essentiellement disjoints) assure que le développement des éléments de Q donné par (1.1) est unique (en dehors d'un ensemble négligeable).

Notons que l'on peut toujours supposer que l'un des éléments de $\mathcal{T}$ est nul. En effet, translater les éléments t_i de $\mathcal{T}$ par $-t_1$ revient à translater l'ensemble Q par

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A^{-n} t_1.$$

Nous prendrons donc une famille $\mathcal{T}$ de la forme

$$\mathcal{T} = \{t_1 = 0, \dots , t_q\}, \text{ avec } q = |\det(A)|.$$

Donnons maintenant quelques résultats généraux sur les ensembles Q définis par (1.1), lorsque $m(Q) > 0$.

On peut exprimer la propriété (1.3) d'auto-affinité par changement d'échelle, sous la forme fonctionnelle équivalente suivante (équation d'échelle):

$$1_Q(x) = \sum_{t \in \mathcal{T}} 1_Q(Ax - t), \tag{1.4}$$

l'égalité étant vérifiée presque-partout.

Notons: $\mathcal{T}_k$ l'ensemble des "développements d'ordre $k \geq 1$ en base A",

$$\mathcal{T}_k = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} A^j x_j, x_j \in \mathcal{T} \right\},$$

$\mathcal{T}_\infty = \bigcup_k \mathcal{T}_k$ l'ensemble des développements finis, et $\mathcal{T}'_\infty = \mathcal{T}_\infty - \mathcal{T}_\infty$.

La condition (1.3) implique

$$A^k Q = \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{T}_k} (Q + \gamma).$$

En particulier, les développements finis

$$\sum_{j=0}^{k-1} A^j x_j, x_j \in \mathcal{T},$$

sont deux à deux distincts.

Définition. Un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^d$ est dit uniformément discret, s'il existe $\delta > 0$ tel que:

$$\forall \gamma \neq \gamma' \in \mathcal{E}, \|\gamma - \gamma'\| \geq \delta > 0. \tag{1.5}$$

Théorème 1.1. *Soient A et $\mathcal{T}$ vérifiant la condition* (1.3) *et tels que* $|\det(A)| = card\mathcal{T}$. *Les conditions suivantes* 1) *et* 2) *d'une part, et* 3) *et* 4) *d'autre part sont équivalentes entre elles:*

1) *Q est d'intérieur non vide,*
2) *les translatés $(Q + \gamma, \gamma \in \mathcal{T}'_\infty)$ forment un recouvrement de $\mathbb{R}^d$,*
3) *$m(Q) > 0$,*
4) *l'ensemble $\mathcal{T}_\infty$ est uniformément discret.*

Preuve. a) Montrons que 1) et 2) sont équivalents.

Supposons que Q soit d'intérieur non vide. Soit a un point intérieur à Q. Quitte à tronquer son développement, on peut supposer que a est donné par un développement fini,

$$a = \sum_{j=1}^{k-1} A^{-j} x_j(a),$$

pour un entier $k \geq 2$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, il existe un entier p, que l'on peut supposer $\geq k$, tel que $z = a + A^{-p}y \in Q$. Soit

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} x_j(z)$$

un développement de z. Le point y peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} y &= A^p z - A^p a \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} x_{j+p}(z) + \sum_{j=0}^{p-1} A^j x_{p-j}(z) - \sum_{j=p-k+1}^{p-1} A^j x_{p-j}(a), \end{aligned}$$

qui est bien dans $Q + \gamma$, pour un γ dans $\mathcal{T}'_\infty$.

Réciproquement, 2) implique 1) par le théorème de Baire.

b) Montrons que 3) et 4) sont équivalents.

Si $m(Q) > 0$, la condition $card\mathcal{T} = |\det A|$ implique la propriété de réunion disjointe dans (1.3).

D'autre part, la continuité de la translation dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$ implique qu'il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $\gamma \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\gamma\| < \delta \text{ implique } m(Q \cap (Q+\gamma)) \geq m(Q)/2.$$

et donc $\mathcal{T}_\infty$ vérifie la condition (1.5).

Réciproquement, supposons que $\mathcal{T}_\infty$ soit uniformément discret de constante $\delta > 0$.

Il existe $R > 0$ tel que la boule B_R de rayon R soit appliquée dans elle-même par l'application χ. La suite $(\chi^n(B_R), n \geq 1)$ obtenue par itération de l'application χ est décroissante; l'intersection de ces ensembles est l'unique point fixe Q de l'application χ et on a

$$m(Q) = \lim_n m(\chi^n(B_R)).$$

Soit α tel que $0 < \alpha < \inf(R, \delta/2)$. Dans l'égalité

$$\chi^n(B_\alpha) = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{T}_n} (A^{-n}B_\alpha + A^{-n}\gamma),$$

les ensembles sont disjoints. On a donc

$$\begin{aligned} m(\chi^n(B_R)) &\geq m(\chi^n(B_\alpha)) \\ &= card(\mathcal{T}_n)\ m(A^{-n}B_\alpha) \\ &= |\det(A)|^{-n} card(\mathcal{T}_n)\ m(B_\alpha) \\ &= m(B_\alpha), \end{aligned}$$

d'où $m(Q) = \lim_n \downarrow m(\chi^n(B_R)) \geq m(B_\alpha) > 0$. □

I.2 Construction d'ensembles auto-affines dans le cas entier

Quelles sont les matrices A pour lesquelles on peut construire une famille $\mathcal{T}$ telle que le couple $(A, \mathcal{T})$ vérifie $m(Q(A, \mathcal{T})) > 0$? La propriété (1.5) "d'ensemble uniformément discret" vérifiée par $\mathcal{T}_\infty$ suggère une condition de réseau.

Dans la suite, nous nous placerons dans le cas où la matrice A est à *coefficients entiers* et nous prendrons une famille $\mathcal{T}$ appartenant au réseau $\mathbb{Z}^d$. Plus particulièrement, nous choisirons une famille $\mathcal{T}$ formant un *système complet de représentants* $\{t_1 = 0, \ldots, t_q\}$ de $\mathbb{Z}^d / A\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{Z}^d$.

On note que $card(\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d) = |\det(A)|$.

Pour une matrice A et une famille de translations $\mathcal{T}$ quelconques, il n'est pas assuré que la mesure de Q défini par (1.1) soit > 0. Par exemple, si A est une matrice à coefficients entiers dont le déterminant est un entier premier, et si $\mathcal{T}$ n'est pas un système complet, on a $m(Q) = 0$ (cf. [**13**]). Nous allons voir que, par contre, si $\mathcal{T}$ est un système complet on a bien $m(Q) > 0$.

Considérons la famille des compacts K tels que

$$\bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} (K + \gamma) = \mathbb{R}^d. \tag{1.6}$$

Elle est stable par passage à la limite (au sens de la métrique de Hausdorff $\delta_{\mathcal{K}}$ sur l'espace des compacts introduite plus haut) et stable par application de la transformation χ (on utilise ici le fait que $\mathcal{T}$ forme un système complet de représentants). Partant du cube unité, qui vérifie la relation (1.6), on en déduit, en prenant la limite au sens de δ_K que $Q = \lim_n \chi^n([0,1]^d)$ vérifie encore cette relation. En particulier, ceci implique que Q est de mesure ≥ 1. Notons qu'on peut avoir

$$m(Q) > 1 = m(\chi^n([0,1]^d), \ \forall n \geq 1.$$

Par exemple, si l'on prend $d = 1$, $A = 2$, $\mathcal{T} = \{0, 3\}$, on obtient $Q = [0, 3]$.

Montrons que $m(Q)$ est entier. Formons la somme

$$g(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} 1_Q(x + \gamma).$$

La fonction g est périodique, et, d'après l'équation d'échelle, invariante par A ($g(Ax) = g(x)$), puisque tout élément de $\mathbb{Z}^d$ s'écrit de façon unique sous la forme $\gamma = t + A\gamma'$, avec $t \in \mathcal{T}$ et $\gamma' \in \mathbb{Z}^d$. Elle est donc presque partout égale à une constante C, d'après l'ergodicité de l'endomorphisme du tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ induit par l'action de la matrice dilatante A. La fonction g étant une somme d'indicatrices, cette constante C est entière ≥ 1.

Puisque

$$\int_{[0,1]^d} g(x)dx = m(Q),$$

on a donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$m(Q) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} 1_Q(x+\gamma) \tag{1.7}$$

Dans le cas où nous nous sommes placés (A à coefficients entiers et $\mathcal{T}$ système complet de représentants de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$) les conditions 1), 2), 3), 4) du théorème 1.1 sont évidemment vérifiées. De plus, dans ce cas, on peut extraire de la famille des translatés $(Q+\gamma, \gamma \in \mathcal{T}'_\infty)$ une sous-famille formant un pavage de $\mathbb{R}^d$ (cf. [**13**]). Nous montrerons dans la suite qu'en fait il existe un sous-réseau Γ de $\mathbb{Z}^d$ (ne coïncidant pas nécessairement avec cette sous-famille) tel que les translatés de Q par les éléments de Γ forment un pavage de $\mathbb{R}^d$. Ce résultat est relié aux deux problèmes suivants.

I.3 Deux problèmes de pavage

Le recouvrement de $\mathbb{R}^d$ par des translatés de Q a un "indice" qui est égal, d'après la relation (1.7), à la mesure $m(Q)$ du motif de base. Il est équivalent de montrer que l'on a un pavage de $\mathbb{R}^d$ au sens des translatés de Q par $\mathbb{Z}^d$, ou de montrer que $m(Q) = 1$.

On notera que, dans le cas où Q fournit un pavage de $\mathbb{R}^d$ par translations par $\mathbb{Z}^d$, on a obtenu un codage de l'endomorphisme défini par l'action de A sur $\mathbb{T}^d$, qui réalise un isomorphisme naturel entre le schéma de Bernoulli défini par le décalage sur l'espace produit $\mathcal{T}^{\mathbb{N}^*}$ muni de la mesure produit et le système $(\mathbb{T}^d, m, A)$.

Problème 1

Un premier problème est de pouvoir décider dans quel cas on a effectivement un pavage de $\mathbb{R}^d$ au sens de $\mathbb{Z}^d$. Cette question est équivalente à celle de l'orthogonalité des fonctions $(1_Q(\cdot - \gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d)$.

Il est commode d'interpréter cette question, comme un problème d'orthogonalité dans la construction d'une analyse multirésolution. La forme fonctionnelle (1.4) de la propriété (1.3) conduit en effet au formalisme de l'analyse multirésolution.

La condition d'orthogonalité des fonctions $(1_Q(\cdot - \gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d})$ équivaut au fait que la somme

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} 1_Q(x+\gamma),$$

qui est une constante entière, est égale à 1.

Ce problème sera traité de deux façons: d'une part comme un cas particulier d'un problème général d'orthogonalité dans la construction d'une analyse multirésolution, d'autre part directement (voir paragraphe III) comme cas particulier de l'étude des pavages aléatoires.

Problème 2

Un deuxième problème est celui de l'existence d'un sous-réseau Γ de $\mathbb{Z}^d$ qui remplace $\mathbb{Z}^d$, dans le cas où les translatés de Q par les éléments de $\mathbb{Z}^d$ ne forment pas un pavage de $\mathbb{R}^d$.

L'exemple le plus simple dans lequel cette situation se présente est celui que nous avons donné plus haut:

$$d = 1,\ A = 2,\ \mathcal{T} = \{0, 3\}.$$

Dans ce cas, $Q = [0, 3]$ et le pavage est obtenu pour le sous-réseau $\Gamma = 3\mathbb{Z}$.

Plus généralement, en dimension $d \geq 1$, considérons une matrice inversible C à coefficients entiers commutant avec A et telle que $\tilde{\mathcal{T}} = C\mathcal{T}$ soit encore un ensemble de représentants de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{Z}^d$.

On voit facilement que si les translatés de l'ensemble $Q = Q(A, \mathcal{T})$ par $\mathbb{Z}^d$ pavent $\mathbb{R}^d$, alors les translatés de l'ensemble $\tilde{Q} = Q(A, \tilde{\mathcal{T}})$ par le sous-réseau $C\mathbb{Z}^d$ de $\mathbb{Z}^d$ pavent $\mathbb{R}^d$.

Cet exemple suggère de poser la question suivant: montrer que tout pavé auto-affine associé à un couple $(A, \mathcal{T})$, avec A matrice dilatante à coefficients entiers et $\mathcal{T}$ système complet de représentants de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$, fournit un pavage de $\mathbb{R}^d$ à l'aide d'un sous-réseau $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$. Ce problème sera résolu dans la section IV.

II. Analyse multirésolution associée à une matrice dilatante dans $\mathbb{R}^d$

La construction des pavages auto-affines associés à une matrice dilatante à coefficients entiers A, rappelée dans l'étude précédente, apparaît comme un cas particulier de la théorie générale des analyses multirésolutions de dimension d, que nous allons présenter brièvement dans ce paragraphe.

Pour l'étude générale des analyses multirésolutions, on pourra se reporter à [**17**] et [**6**]. Pour les points abordés plus spécialement ici, critères d'orthogonalité ou de bases de Riesz, mentionnons notamment [**4**], où a été introduite la méthode des ensembles invariants, [**11**], [**3**], [**15**].

L'un des problèmes spécifique à la dimension $d > 1$ est l'établissement de critère sous une forme algébrique explicite. L'outil principal que nous allons utiliser est le théorème (2.8) de [**2**] rappelé plus loin.

La lecture des paragraphes II.2 et II.3 n'est pas nécessaire, si l'on s'intéresse uniquement à l'étude des pavages auto-affines.

II.1 Définitions et Notations

Comme précédemment, nous considérons une matrice carrée A d'ordre d inversible, à coefficients entiers, dilatante. Nous notons $q = |\det A|$ et $B = A^*$ sa matrice adjointe.

Nous choisissons une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$, telle que la norme matricielle $\left\|B^{-1}\right\|$ associée soit < 1.

L'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ continues et $\mathbb{Z}^d$-périodiques, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, est noté E.

Dans la suite, nous considérons un système

$$\mathcal{D} = \{\sigma_1 = 0, \sigma_2, \dots, \sigma_q\}$$

de q représentants de $\mathbb{Z}^d \bmod B\mathbb{Z}^d$. La transformation affine de $\mathbb{R}^d$ définie par $\lambda \to B^{-1}(\lambda + \sigma)$ est notée $\breve{\sigma}$.

La notion de fermé invariant nous sera utile dans la construction d'analyses multirésolutions (pour les définitions qui suivent, voir [**4**], [**11**], [**2**]).

Définitions. Etant donnée une fonction $\mathbb{Z}^d$-périodique u, à valeurs ≥ 0, un fermé K de $\mathbb{R}^d$ est dit *invariant* (relativement au couple (B, u)) si, pour tout $\lambda \in K$ et tout $\sigma \in \mathcal{D}$ tels que $u(\breve{\sigma}\lambda) > 0$, on a $\breve{\sigma}\lambda \in K$. La fonction u étant $\mathbb{Z}^d$-périodique, cette notion d'invariance ne dépend pas du choix du système de représentants $\mathcal{D}$.

On note P_u l'opérateur défini sur E par

$$P_u f(\lambda) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}} u(\breve{\sigma}\lambda) f(\breve{\sigma}\lambda). \tag{2.1}$$

Cet opérateur ne dépend pas du choix de $\mathcal{D}$.

Il est commode de se représenter P_u comme un opérateur de transition (bien qu'il ne soit pas nécessairement normalisé). Nous dirons que la transition d'un point x vers un point y est permise si y est de la forme $y = \breve{\tau}x$, pour un τ dans $\mathcal{D}$ tel que $u(\breve{\tau}x) > 0$. On schématisera cette situation par la notation:

$$x \to \breve{\tau}x,$$

et on dira que x "mène à" $y = \breve{\tau}x$.

Définition. Une *analyse multirésolution* (cf. [**3**], [**5**], [**6**], [**16**], [**17**]), relativement à A, est une famille $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tels que:

a) $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$,

b) $V_{j+1} = \{f \circ A,\ f \in V_j\}$ et $V_j \subset V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

c) il existe une fonction $\phi \in V_0$, appelée *fonction d'échelle*, telle que la famille $\{\phi(\cdot + \gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d\}$ des translatées de la fonction ϕ par les éléments du réseau $\mathbb{Z}^d$ engendre V_0 et forme une base de Riesz de V_0.

Rappelons que la famille $\{\phi(\cdot + \gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d\}$ forme une base de Riesz de l'espace V_0 qu'elle engendre, s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, pour toute suite $(c_\gamma) \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$,

$$\frac{1}{C} \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} |c_\gamma|^2 \le \left\| \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} c_\gamma \phi(\cdot + \gamma) \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)} \le C \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} |c_\gamma|^2. \tag{2.2}$$

Dans la définition d'une analyse multirésolution, on peut renforcer la condition de base de Riesz par la condition que les fonctions de la famille $\{\phi(\cdot + \gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d\}$ soient deux à deux *orthogonales*. Sous cette condition, on peut alors construire à partir de la suite de sous-espaces $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une base d'ondelettes orthogonales. Dans le cas où l'on a seulement la propriété de base de Riesz, il est possible de construire deux bases bi-orthogonales (cf. [**3**]).

Notation. Dans la suite, nous noterons

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2i\pi\langle x,\lambda\rangle} dx$$

la transformée de Fourier d'une fonction f sur $\mathbb{R}^d$.

Construction d'analyses multirésolutions

Soit $(h_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ une famille indexée par $\mathbb{Z}^d$, de nombres complexes nuls sauf pour un nombre fini d'indices, telle que

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} h_\gamma = q.$$

Nous considérons l'équation d'échelle

$$\phi(x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} h_\gamma \phi(Ax-\gamma), \tag{2.3}$$

qui va permettre de construire une analyse multirésolution associée à une fonction d'échelle ϕ solution de (2.3).

Posons

$$H(\lambda) = \frac{1}{q} \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} h_\gamma e^{2i\pi\langle\gamma,\lambda\rangle},\ \lambda\in\mathbb{R}^d, \tag{2.4}$$

et

$$u = |H|^2. \tag{2.5}$$

On note que $H(0) = 1$ et donc $u(0) = 1$.

Soient

$$N = \max\{\|\gamma-\gamma'\|, h_\gamma h_{\gamma'} \neq 0\}, \quad M = \left[\frac{N\delta}{1-\delta}\right] + 1,$$

où

$$\delta = \left\|A^{-1}\right\| \text{ et } I_M = \{\gamma\in\mathbb{Z}^d, \|\gamma\| \leq M\}.$$

Notons $T = (T(a,b))_{a,b\in I_M}$ la matrice définie par

$$T(a,b) = \frac{1}{q} \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} h_\gamma \overline{h}_{\gamma-Aa+b}, a,b\in I_M,$$

$\rho(T)$ son rayon spectral et $\nu(\rho(T))$ l'indice de $\rho(T)$, c'est-à-dire le plus petit entier n tel

$$\ker(T-\rho(T)Id)^n = \ker(T-\rho(T)Id)^{n+1}$$

(nous montrerons que $\rho(T)$ est une valeur propre de T, donc $\nu(\rho(T)) \geq 1$).

II.2 Critères de bases de Riesz et de bases orthogonales

Les propositions ci-dessous fournissent un procédé de construction d'analyses multirésolutions.

Théorème 2.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *Il existe $\phi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ non identiquement nulle solution de* (2.3) *et la famille $\{\phi(\cdot+\gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d\}$ vérifie* (2.2), *pour une constante $C>0$.*
2) *On a: $H(\breve{\sigma}0)=0$, $\forall \sigma \in \mathcal{D}-\{0\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^d$,*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{D}} |H(\breve{\sigma}\lambda)|^2 > 0; \quad \rho(T)=1, \quad \nu(\rho(T))=1,$$

et tout fermé invariant $\mathbb{Z}^d$-périodique contient 0.

3) $\ker(T-Id)$ *est engendré par un vecteur $(c_\gamma)_{\gamma\in I_M}$ tel que le polynôme*

$$\sum_{\gamma \in I_M} c_\gamma e^{2i\pi\langle\gamma,\lambda\rangle}$$

soit à valeurs réelles strictement positives.

Dans le cas orthogonal, on a un énoncé similaire:

Théorème 2.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1′) *Il existe $\phi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ non identiquement nulle vérifiant* (2.3) *et la famille $\{\phi(\cdot+\gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d\}$ forme un système orthonormé.*

2′) $\sum_{\sigma \in \mathcal{D}} |H(\breve{\sigma}\lambda)|^2 = 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^d$, *et tout fermé invariant $\mathbb{Z}^d$-périodique contient* 0.

3′) $\sum_{\sigma \in \mathcal{D}} |H(\breve{\sigma}\lambda)|^2 = 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^d$ *et* $\dim\ker(T-Id)=1$.

Le lien entre ces théorèmes et les analyses multirésolutions est rappelé dans le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Sous les conditions équivalentes du théorème* 2.1, *il existe une fonction ϕ (à support compact) unique solution de* (2.3), *à une* *constante multiplicative près. La famille* $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$*, où* V_0 *est l'espace engendré par les fonctions* $(\phi(\cdot+\gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d)$ *et où* $V_j = \{f \circ A^j, f \in V_0\}$*, forme une analyse multirésolution de* $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$*.*

Preuve. Le résultat est classique dans la théorie des analyses multirésolutions (voir [**5**], [**17**] pour une démonstration complète). Nous en rappelons brièvement la preuve.

Sous la condition 1) du théorème 2.1, les points b) et c) de la définition d'une analyse multirésolution résultent de la construction des V_j, de (2.2) et de l'équation (2.3) (qui assure l'inclusion $V_0 \subset V_1$).

Les conditions asymptotiques a) d'une analyse multirésolution se déduisent d'une généralisation immédiate du cas de la dimension 1 (cf. [**17**]). □

Réciproquement, si $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution associée à une fonction d'échelle ϕ, alors la condition (2.2) est satisfaite par définition et l'inclusion $V_0 \subset V_1$ assure l'existence d'une famille de coefficients $(h_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ telle que l'équation (2.3) soit vérifiée par ϕ. Mais la famille n'est pas nécessairement à support fini.

Nous donnerons plus loin les grandes lignes de la démonstration des théorèmes 2.1 et 2.2. Dans le cas où $d = 1$ et A est la multiplication par 2, on pourra se reporter à [**3**], [**4**], [**10**], [**11**]. Nous établissons d'abord quelques résultats intermédiaires.

Remarques 1. On montre facilement que l'équation (2.3) a une solution, au sens des distributions, d'ordre fini non nulle à support compact. En observant que, pour une fonction f sur $\mathbb{R}^d$, on a formellement en posant $f_{A,\gamma}(x) = f(Ax-\gamma)$,

$$\hat{f}_{A,\gamma}(\lambda) = q^{-1}\hat{f}(B^{-1}\lambda)e^{2i\pi\langle\gamma,B^{-1}\lambda\rangle},$$

on obtient que la transformée de Fourier d'une solution de (2.3) est donnée à un facteur constant près par le produit infini:

$$\Pi(\lambda) = \prod_{k=1}^{+\infty} H(B^{-k}\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

La fonction Π est définie, continue sur $\mathbb{R}^d$ du fait que H est lipschitzienne et que B^{-1} est contractante. Elle vérifie l'équation fonctionnelle:

$$\Pi(\lambda) = H(B^{-1}\lambda)\Pi(B^{-1}\lambda). \tag{2.6}$$

On définit formellement

$$\eta(\lambda) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} |\Pi(\lambda+\gamma)|^2, \ \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

D'après ce qui précède, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ non identiquement nulle solution de (2.3) est que $\Pi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Cette solution s'obtient alors à un facteur près comme la transformée de Fourier inverse de Π. Nous désignerons par ϕ, précisément, la transformée de Fourier inverse de Π. Si ϕ est à support compact et de carré intégrable, on peut montrer que la série définissant η est uniformément convergente sur tout compact (cf. [**17**]). La fonction η est un polynôme trigonométrique et elle est invariante par l'opérateur P_u défini par (2.1): $P_u\eta = \eta$.

En effet, pour tout $\gamma_0 \in \mathbb{Z}^d$, nous avons, par la formule de Plancherel, la relation suivante:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^d} \eta(\lambda) e^{2\pi i\langle\gamma_0,\lambda\rangle} d\lambda &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d} |\Pi(\lambda+\gamma)|^2 e^{2\pi i\langle\gamma_0,\lambda\rangle} d\lambda \\
&= \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d+\gamma} (\Pi(\lambda) e^{2\pi i\langle\gamma_0,\lambda\rangle})\overline{\Pi(\lambda)} d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\Pi(\lambda) e^{2\pi i\langle\gamma_0,\lambda\rangle})\overline{\Pi(\lambda)} d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\lambda-\gamma_0)\overline{\phi(\lambda)} d\lambda.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Puisque ϕ est à support compact,

$$\eta(\lambda) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \langle \phi, \phi(\cdot+\gamma)\rangle e^{2i\pi\langle\gamma,\lambda\rangle}$$

est un polynôme trigonométrique.

En outre, il résulte de (2.6) que

$$\eta(\lambda) = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}} \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \left|H(B^{-1}\lambda+\gamma+B^{-1}\sigma)\right|^2 \left|\Pi(B^{-1}\lambda+\gamma+B^{-1}\sigma)\right|^2;$$

d'où $P_u\eta = \eta$.

Les résultats qui suivent fournissent des critères assurant la validité des conditions énoncées dans les théorèmes 2.1 et 2.2.

Proposition 2.4. a) *Supposons* Π *dans* $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* ϕ *vérifie* (2.2) *(resp. que les fonctions* $(\phi(\cdot+\gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d)$ *forme une famille orthonormée) est que* $\eta(\lambda) > 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^d$, *(resp.* $\eta \equiv 1$*).*

b) *Sous l'hypothèse:*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{D}} |H(\check{\sigma}\cdot)|^2 > 0,$$

l'ensemble $Z(\eta)$ *des zéros de* η *(s'il n'est pas vide) est un fermé invariant* $\mathbb{Z}^d$*-périodique ne contenant pas* 0 *et tout fermé ayant ces propriétés est contenu dans* $Z(\eta)$.

Preuve. a) En utilisant la formule de Plancherel, on obtient

$$\left\| \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} c_\gamma \phi(\cdot + \gamma) \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{[0,1]^d} \left| \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} c_\gamma e^{2i\pi\langle\gamma,\lambda\rangle} \right|^2 \eta(\lambda) d\lambda,$$

pour toute suite finie $(c_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes. Lorsque $\eta > 0$, on en déduit (2.2) à l'aide de l'égalité de Parseval pour les séries trigonométriques. De même, l'orthogonalité des $(\phi(\cdot + \gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d)$ en résulte pour le cas $\eta \equiv 1$.

b) Le fait que $Z(\eta)$ soit un fermé invariant résulte de l'égalité $P_u\eta = \eta$. En outre, comme $\hat{\phi}(0) = \Pi(0) = 1$, on a $\eta(0) \geq 1$.

Considérons maintenant un fermé invariant $\mathbb{Z}^d$-périodique K tel que $0 \notin K$. Soit $\lambda \in K$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(B^{-k}\lambda) = 0$, car dans le cas contraire tous les points $B^{-k}\lambda$ seraient dans K, et donc aussi 0. Puisque $\lambda + \gamma \in K$, pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^d$, on en déduit bien que $\eta(\lambda) = 0$. □

Remarques 2. 1) La condition

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{D}} |H(\check{\sigma}\cdot)|^2 > 0$$

n'est pas nécessairement vérifiée pour un filtre (h_γ) quelconque. Elle est nécessaire pour que la fonction ϕ engendre une base de Riesz.

Elle est automatique dans le cas où, pour construire une analyse multirésolution orthogonale, on suppose au départ vérifiée la condition de "quadrature":

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{D}} |H(\check{\sigma} \cdot)|^2 \equiv 1.$$

2) Sous l'hypothèse $H(B^{-1}\sigma) = 0$, $\forall \sigma \in \mathcal{D} - \{0\}$, on a $\Pi(\gamma) = 0$, pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^d$, $\gamma \neq 0$. En particulier, on a $\eta(0) = 1$.

En effet, soit $\gamma \in \mathbb{Z}^d$, $\gamma \neq 0$. Il existe un entier $\ell \geq 0$, $b \in \mathbb{Z}^d$, et $\sigma \in \mathcal{D} - \{0\}$ tels que $\gamma = B^\ell(Bb + \sigma)$. D'après l'équation (2.6) et la périodicité de H, on a:

$$\Pi(\gamma) = H(B^{-1}\gamma) \cdots H(B^{-\ell}\gamma) H(b + B^{-1}\sigma) \Pi(b + B^{-1}\sigma);$$

d'où $\Pi(\gamma) = 0$. Comme $H(0) = 1$, on a $\Pi(0) = 1$ et donc $\eta(0) = 1$.

Proposition 2.5. *Soit $\mathcal{F}_M$ le sous-espace de l'espace des polynômes trigonométriques à d variables défini par:*

$$\mathcal{F}_M = \left\{ f(\lambda) = \sum_{\gamma \in I_M} c_\gamma e^{2i\pi\langle\gamma,\lambda\rangle}, c_\gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

a) *Une condition suffisante pour qu'il existe une solution dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ non identiquement nulle de* (2.3) *(ou de façon équivalente pour que Π soit dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$) est que*

$$\sup_{n \geq 1} \|P_u^n 1\|_\infty < +\infty.$$

b) *P_u laisse invariant l'éspace $\mathcal{F}_M$ et la matrice de la restriction de P_u à $\mathcal{F}_M$ écrite dans la base canonique de $\mathcal{F}_M$ est égale à T.*

c) *S'il existe une fonction h continue, périodique, strictement positive et P_u-invariante, et si tout fermé invariant $\mathbb{Z}^d$-périodique contient* 0*, alors toute fonction continue périodique P_u-invariante est proportionnelle à h.*

Preuve. a) Soit

$$K_n = B^n \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d \right).$$

Notons $(\cdot\ ,\cdot)$ le produit hermitien habituel sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^d)$.

Considérons l'action de P_u sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^d)$ et notons P_u^* son adjoint. Soient $f,\ g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}^d)$. A l'aide de changements de variables dans le calcul de (P_u, f, g) et grâce à la périodicité de H, f, g, on obtient:

$$P_u^* g(\lambda) = qu(\lambda)g(B\lambda),$$

d'où

$$(P_u^*)^n g(\lambda) = q^n \left[\prod_{k=0}^{n-1} u(B^k\lambda)\right] g(B^n\lambda).$$

Par changement de variable, on obtient:

$$(P_u^n 1, 1) = (1, (P_u^*)^n 1) = \int_{K_n} \prod_{k=1}^{n} \left|H(B^{-k}\lambda)\right|^2 d\lambda.$$

Sous l'hypothèse

$$\sup_{n\geq 1} \|P_u^n 1\|_\infty < +\infty,$$

ces intégrales sont majorées. Il en résulte, par le lemme de Fatou, que $|\Pi|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

b) Notons (u_γ) les coefficients de Fourier de $u = |H|^2$ et posons, pour

$$\gamma \in \mathbb{Z}^d, e_\gamma(\lambda) = e^{2i\pi\langle\gamma,\lambda\rangle}.$$

Nous avons $u_\gamma = 0$, pour $\|\gamma\| > N$. Il résulte de la formule établie ci-dessus pour le calcul de l'adjoint P_u^*, que

$$(P_u e_b, e_a) = q \sum_{\|\gamma\|\leq N} u_\gamma (e_{\gamma+b-Aa}, 1) = q u_{Aa-b}.$$

Par définition des entiers N et M, il est clair que, si $b \in I_M$, on a $u_{Aa-b} = 0$, pour tout $a \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\|a\| > M$. L'assertion b) s'en déduit.

c) Pour démontrer le point c), définissons sur E l'opérateur

$$Rf(\lambda) = \frac{1}{h(\lambda)} P_u(hf)(\lambda).$$

On observe que $R1 = 1$ et que

$$Rf(\lambda) = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}} w(\breve{\sigma}\lambda) f(\breve{\sigma}\lambda), \text{ où } w(\lambda) = \frac{h(\lambda)}{h(B\lambda)} u(\lambda).$$

Soit $f \in E$ telle que $P_u f = f$. On a alors:

$$R\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{f}{h}.$$

Il reste à prouver que toute fonction g continue, périodique et R-invariante, est nécessairement constante. Pour cela considérons les fermés $\mathbb{Z}^d$-périodiques de $\mathbb{R}^d$ formés des points où g atteint respectivement son maximum et son minimum. On montre facilement que ces fermés sont invariants pour le couple (B, w), en utilisant le fait que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{D}} w(\breve{\sigma}\lambda) = 1.$$

Donc ils contiennent tous les deux 0, ce qui prouve que g est constante. □

II.3 Etude spectrale

Nous donnons ici, en complément, dans le cas général de la construction d'une fonction d'échelle fournissant une base de Riesz, une condition spectrale sur les opérateurs P_u et T qui permet de vérifier la condition a) de la proposition 2.5.

Proposition 2.6. *Le rayon spectral $\rho(T)$ de $P = P_{u|\mathcal{F}_M}$ est une valeur propre de P et il lui est associé une fonction propre à valeurs positives ou nulles. En outre, une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\sup_{n \geq 1} \rho(T)^{-n} \|P_u^n 1\|_\infty < +\infty$$

est que $\ker(T - \rho(T)Id) = \ker(T - \rho(T)Id)^2$.

Preuve. La preuve est classique (voir par exemple [**9**]). Il est clair que

$$\rho(T) = \lim_{n \to +\infty} \|P^n 1\|_\infty^{\frac{1}{n}}.$$

Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels décroissant vers 1.

Pour $n \geq 1$, on note

$$f_n = (\rho(T) t_n Id - P)^{-1} 1 = \sum_{k \geq 0} (\rho(T) t_n)^{-(k+1)} P^k 1.$$

On a $f_n \in \mathcal{F}_M$ et $f_n \geq 0$.

Soit β une valeur propre de P telle que $|\beta| = \rho(T)$. Pour tout $g \in \mathcal{F}_M$, on a, grâce à la positivité,

$$\left\|(\beta t_n Id - P)^{-1} g\right\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f_n\|_\infty. \tag{2.8}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|(\beta t_n Id - P)^{-1}\right\|_\infty = +\infty$$

(car β est une valeur propre), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty.$$

La suite $(\|f_n\|_\infty^{-1} f_n)_{n\geq 1}$ étant bornée dans $\mathcal{F}_M$, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers une fonction $h \geq 0$ (non identiquement nulle car $\|h\|_\infty = 1$).

Par passage à la limite dans l'égalité

$$\|f_n\|_\infty^{-1} (\rho(T))t_n Id - P) f_n = \|f_n\|_\infty^{-1},$$

on obtient $\rho(T)h = Ph$, ce qui prouve les deux premières assertions de la proposition.

On rappelle que l'indice $\nu(\beta)$ de β pour P est le plus petit entier n tel que

$$\ker(P - \beta Id)^n = \ker(P - \beta Id)^{n+1}.$$

Par ailleurs $\nu(\beta)$ est également caractérisé par le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} (t_n - 1)^\ell \left\|(\beta t_n Id - P)^{-1}\right\|_\infty = +\infty,$$

pour $\ell = 0, \ldots, \nu(\beta) - 1$. D'après l'inégalité (2.8), on a:

$$\lim_{n\to+\infty} (t_n - 1)^\ell \left\|(\rho(T) t_n Id - P)^{-1}\right\|_\infty = +\infty,$$

pour $\ell = 0, \ldots, \nu(\beta) - 1$, d'où $\nu(\beta) \leq \nu(\rho(T))$. □

II.4 Preuve du théorème 2.1

1) $\Rightarrow$ 2): On sait d'après la proposition 2.4 a) et les remarques 1 et 2 que $P_u\eta = \eta$, $\eta(0) = 1$ et $\eta > c$ avec $c > 0$. On en déduit aisément les deux premières conditions du 2). En outre P étant positif, nous avons

$$P_u^n 1 \leq c^{-1} P_u^n \eta = c^{-1}\eta \text{ et } \sup_{n\geq 1} \|P_u^n 1\|_\infty < +\infty.$$

On a donc $\rho(T) = 1$ et $\nu(\rho(T)) = 1$. La condition sur les fermés invariants résulte de la proposition 2.4 b).

Notons que le point 3) est équivalent au fait que le sous-espace $\ker(P - Id)$ de $\mathcal{F}_M$ est engendré par une fonction à valeurs strictement positives.

2) $\Rightarrow$ 3): En vertu de la description spectrale de P donnée dans la proposition 2.6, les conditions $\rho(T) = 1$ et $\nu(\rho(T)) = 1$ entraînent que

$$\sup_{n \geq 1} \|P_u^n 1\|_\infty < +\infty.$$

Donc, d'après la proposition 2.5 a), $\Pi = \hat{\phi} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. En outre, d'après la proposition 2.4 b), on a $\eta > 0$. On déduit alors de la proposition 2.5 c) que $\ker(P - Id)$ est engendré par η.

3) $\Rightarrow$ 1): on suppose ici que $\ker(P - Id)$ est engendré par $h > 0$. On en déduit tout d'abord que

$$\sup_{n \geq 1} \|P_u^n 1\|_\infty < +\infty$$

(on reprend la preuve de 1) $\Rightarrow$ 2) en remplaçant η par h). Ceci implique que $\Pi = \hat{\phi} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. La série définissant η est donc convergente. La fonction η est alors un polynôme trigonométrique positif qui, d'après l'hypothèse, doit être proportionnel à h et donc > 0.

Preuve du théorème 2.2. La condition

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{D}} |H(\breve{\sigma} \cdot)|^2 = 1$$

(i.e. $P_u 1 = 1$) entraîne les deux premières conditions du 2),

$$\sup_{n \geq 1} \|P_u^n 1\|_\infty < +\infty \text{ et } \hat{\phi} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

1′) $\Rightarrow$ 2′): on sait que $P_u \eta = \eta$, et que $\eta \equiv 1$. Donc $P_u 1 = 1$. La condition sur les fermés invariants résulte de la proposition 2.4 b).

2′) $\Rightarrow$ 3′): il est clair que 2′) entraîne 2), donc 3), et finalement 3′).

3′) $\Rightarrow$ 1′): comme $P_u 1 = 1$, $\hat{\phi} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$. En outre, on a $\dim \ker(T -$

$Id) = \dim\ker(P_u - Id)$, $P_u\eta = \eta$, et $\eta(0) = 1$, donc $\eta \equiv 1$. $\square$

II.4 Application au problème 1 des pavages

Nous reprenons les notations du paragraphe I. Nous sommes ici dans un cas particulier de la construction d'une analyse multirésolution.

On note F la transformée de Fourier de 1_Q:

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(\lambda,x)} 1_Q(x)dx, \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

La fonction F est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$ et l'équation d'échelle se traduit par:

$$F(\lambda) = H(B^{-1}\lambda)F(B^{-1}\lambda),$$

où $H(\lambda)$ est défini, pour $\lambda \in \mathbb{R}^d$, par

$$H(\lambda) = \frac{1}{|\det(A)|} \sum_{t\in\mathcal{T}} e^{2\pi i\langle t,\lambda\rangle}.$$

Un calcul simple montre que la fonction H vérifie la condition de "quadrature":

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{D}} \left|H(\lambda + B^{-1}\sigma)\right|^2 = 1, \tag{2.9}$$

pour tout système complet $\mathcal{D}$ de représentants de $\mathbb{Z}^d/B\mathbb{Z}^d$.

Soit Π définie par le produit infini:

$$\Pi(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} H(B^{-j}\lambda). \tag{2.10}$$

On a: $F(\lambda) = F(0)\Pi(\lambda) = m(Q)\Pi(\lambda)$,

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} |F(\cdot + \gamma)|^2 = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} m[(Q+\gamma)\cap Q]e^{2i\pi\langle\gamma,\lambda\rangle}$$

et

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} |F(\cdot + \gamma)|^2 = |F(0)|^2 \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} |\Pi(\cdot + \gamma)|^2.$$

Le problème 1 des pavages (orthogonalité des translatés $1_Q(\cdot - \gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^d$) est équivalent à

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} |F(\cdot + \gamma)|^2 \text{ est constant”}$$

ou encore à

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}\left|\prod(\cdot+\gamma)\right|^2 \quad \text{est constant”.}$$

Comme conséquence des résultats précédents, on obtient:

Proposition 2.7. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) $m(Q) = 1$;

ii) $g(x) = 1$, *pour m-presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$;

iii) $\eta(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$;

iv) *tout fermé $\mathbb{Z}^d$-périodique de $\mathbb{R}^d$ invariant pour (B, u) contient* 0.

II.5 Expression algébrique du critère d'orthogonalité

Nous avons vu que l'obstruction à la condition d'orthogonalité ou de base de Riesz (cf. théorème 2.1 et 2.2) est l'existence d'un fermé $\mathbb{Z}^d$-périodique invariant ne contenant pas 0. Le résultat suivant a été établi dans [**2**], pour des fonctions u entières (ce qui est le cas ici, puisque la fonction u apparaissant dans la construction des analyses multirésolutions considérées est un polynôme trigonométrique).

Théorème 2.8. ([**2**], Th. 3.3) *S'il existe un fermé invariant $\mathbb{Z}^d$-périodique C différent de $\mathbb{R}^d$, alors il existe un élément x_0 de $\mathbb{R}^d$, vérifiant $B^m x_0 = x_0 \mod \mathbb{Z}^d$, pour un entier $m \geq 1$, et un sous-espace rationnel propre W de $\mathbb{R}^d$ stable par B (éventuellement réduit à $\{0\}$) tels que la réunion*

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k=0}^{m-1}(B^k x_0 + W + \mathbb{Z}^d)$$

soit un fermé invariant de $\mathbb{R}^d$. De plus, toute transition permise à partir d'un point de $B^k x_0 + W + \mathbb{Z}^d$, $1 \leq k \leq m$, mène à un point de $B^{k-1}x_0 + W + \mathbb{Z}^d$.

III. Pavages Aléatoires de $\mathbb{R}^d$

III.1 Généralisation de la construction des pavés auto-similaires

Nous généralisons maintenant la construction des pavés auto-similaires. Cette généralisation sera utile dans la preuve du théorème principal, qui repose, comme dans [**14**], sur une méthode de réduction par récurrence.

Soient A une matrice dilatante à coefficients entiers et N un entier ≥ 1. Nous supposons donnée une famille $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_N$ de N systèmes complets de représentants de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{Z}^d$. Nous noterons I l'ensemble des indices $\{1, \ldots, N\}$ et $B = A^*$ la matrice transposée de A.

Pour tout suite $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ dans l'espace produit $\Omega = I^{\mathbb{N}^*}$, nous construisons l'ensemble $Q(\omega)$ formé de tous les développements en "base A", dont les "digits" d'indice k sont choisis dans le système de représentants $\mathcal{T}_{\omega_k}$ déterminé par la coordonnée ω_k du point ω. Formellement, l'ensemble $Q(\omega)$ est donc défini par:

$$Q(\omega) = \left\{ \sum_{k \geq 1} A^{-k} x_k \colon \forall k \geq 1, x_k \in \mathcal{T}_{w_k} \right\}.$$

Sur $\Omega = I^{\mathbb{N}^*}$ on fait opérer le décalage θ défini par: $\theta(\omega_1, \omega_2, \ldots) = (\omega_2, \omega_3, \ldots)$. On obtient immédiatement, pour tout $\omega \in \Omega$, l'inclusion

$$AQ(\omega) \subset \bigcup_{t \in \mathcal{T}_{\omega_1}} [Q(\theta\omega) + t],$$

et donc l'inégalité:

$$1_{Q(\omega)}(x) \leq \sum_{t \in \mathcal{T}_{\omega_1}} 1_{Q(\theta\omega)}(Ax - t).$$

Munissons Ω de la tribu produit $\mathcal{F} = \otimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{P}(I)$ et considérons maintenant une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω invariante par le décalage. Par la suite nous utiliserons le formalisme présenté dans cette section III dans deux cas particuliers: le cas (trivial!) où $\mathbb{P}$ est concentrée sur un point (cas $N = 1$) et le cas où $\mathbb{P}$ est une mesure produit sur Ω.

On obtient en intégrant l'inégalité précédente en x (par rapport à la mesure de Lebesgue), puis en ω (par rapport à $\mathbb{P}$) une égalité. Ceci prouve que l'on a, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, l'égalité (vérifíe pour presque tout x)

$$1_{Q(\omega)}(x) = \sum_{t \in \mathcal{T}_{\omega_1}} 1_{Q(\theta\omega)}(Ax - t). \tag{3.1}$$

III.2 Propriétés des pavés $Q(\omega)$

Compte-tenu de (3.1), on montre aisément les résultats suivants qui généralisent le cas où le système de représentants $\mathcal{T}$ est fixé (cas $N = 1$).

Lemme 3.1. a) *Pour toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ invariante par le décalage sur Ω, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, les ensembles*

$$\{Q(\theta\omega) + t, t \in \mathcal{T}_{\omega_1}\}$$

sont essentiellement disjoints.

b) *Pour tout $i \in I$, appelons χ_i l'application définie sur l'espace $\mathcal{K}$ des compacts de $\mathbb{R}^d$ par*

$$\chi_i: K \mapsto \chi_i(K) = \bigcup_{t \in \mathcal{T}_i} (A^{-1}K + A^{-1}t).$$

Les applications χ_i sont contractantes, quand on munit $\mathbb{R}^d$ de la métrique associée à la norme contractée par A^{-1} et $\mathcal{K}$ de la distance de Hausdorff correspondante.

Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout compact Q_0, la suite de Cauchy

$$(\chi_{\omega_1} \circ \cdots \circ \chi_{\omega_n}(Q_0))_{n \geq 1}$$

converge, au sens de la distance de Hausdorff, vers $Q(\omega)$. En prenant $Q_0 = [0,1]^d$, nous avons:

$$X_{\omega_1} \circ \cdots \circ \chi_{\omega_n}(Q_0) + \mathbb{Z}^d = \mathbb{R}^d, \ \forall n \geq 0,$$

et, en passant à la limite,

$$Q(\omega) + \mathbb{Z}^d = \mathbb{R}^d.$$

Lemme 3.2. *Si $\mathcal{T}$ est un système de représentants de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$, le plus petit $\mathbb{Z}$-module invariant par A et contenant $\mathcal{T}$, $\mathbb{Z}(\mathcal{T}, A)$, est un sous-réseau de $\mathbb{Z}^d$, de la forme $M\mathbb{Z}^d$, la matrice M étant à coefficients entiers, avec $|\det(M)| \geq 1$.*

Preuve. En effet, d'après les résultats du paragraphe 1, on peut recouvrir l'espace $\mathbb{R}^d$ par des translatés de l'ensemble $Q(A, \mathcal{T})$ associé à $\mathcal{T}$ et à A, les translations étant prises de la forme $\sum_j A^j(x_j - x'_j)$, avec x_j, $x'_j \in \mathcal{T}$. Ceci implique que $\mathbb{Z}(\mathcal{T}, A)$ est un sous-réseau de $\mathbb{Z}^d$. □

III.3

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^d \times \Omega$ par

$$g(x,\omega) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} 1_{Q(\omega)}(x+\gamma).$$

On a, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\int_{[0,1]^d} g(x,\omega)dx = \int_{\mathbb{R}^d} 1_{Q(\omega)}(x)dx = m(Q(\omega)), \tag{3.2}$$

m désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, et on vérifie que

$$g(Ax, \theta\omega) = g(x,\omega), \ \forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \Omega. \tag{3.3}$$

Pour montrer que la fonction g est presque partout égale à une constante, nous utilisons un argument de théorie ergodique. L'endomorphisme A définit sur le tore $\mathbb{T}^d$, muni de la mesure de Lebesgue m, un système dynamique à spectre continu. Ceci implique d'après un résultat classique en théorie ergodique que, pour toute mesure $\mathbb{P}$ invariante par θ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui est ergodique, en particulier pour une mesure produit, le produit cartésien des systèmes $(\mathbb{T}^d, m, A)$ et $(\Omega, \mathbb{P}, \theta)$ est ergodique.

La relation (3.3) implique alors que la fonction g est constante $m \otimes \mathbb{P}$-presque partout. D'où, pour $m \otimes \mathbb{P}$-presque tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \Omega$,

$$g(x,\omega) = m(Q(\omega)) = \int_\Omega m(Q(\omega))\mathbb{P}(d\omega), \tag{3.4}$$

quantité qui est nécessairement un entier ≥ 1, puisque g est une somme d'indicatrices et que, d'après le lemme 3.1.b, $g \geq 1$.

III.4

Considérons la transformée de Fourier de $1_{Q(\omega)}$:

$$F_\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i\langle x,y\rangle} 1_{Q(\omega)}(y)dy, (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \Omega.$$

La fonction $F_\omega(\cdot)$ est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$ et vérifie, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,

$$F_\omega(x) = H(B^{-1}x, \omega_1) F_{\theta\omega}(B^{-1}x),$$

où $H(x,j)$ est défini, pour $(x,j) \in \mathbb{R}^d \times I$, par

$$H(x,j) = \frac{1}{|\det(A)|} \sum_{t \in \mathcal{T}_j} e^{2\pi i \langle t,x \rangle}.$$

Posons, pour $(x,j) \in \mathbb{R}^d \times I$,

$$\eta_\omega(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} |F_\omega(x+\gamma)|^2, \omega \in \Omega,$$

et

$$u(x,j) = |H(x,j)|^2.$$

Pour tout $\gamma_0 \in \mathbb{Z}^d$ et $\omega \in \Omega$, nous avons par la formule de Plancherel (comme dans la relation 2.7 du paragraphe II),

$$\int_{[0,1]^d} \eta_\omega(x) e^{2\pi i \langle \gamma_0, x \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^d} 1_{Q(\omega)}(x-\gamma_0) 1_{Q(\omega)}(x) dx. \tag{3.5}$$

III.5

L'ensemble $Q(\omega)$ étant un compact de $\mathbb{R}^d$, cette dernière intégrale est nulle pour $\|\gamma_0\|$ assez grand. Il en résulte que, pour tout $\omega \in \Omega$, et pour m-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a:

$$\eta_\omega(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} 1_{Q(\omega)}(y+\gamma) 1_{Q(\omega)}(y) dy \right) e^{2\pi i \langle \gamma, x \rangle}, \tag{3.6}$$

où le second membre est un polynôme trigonométrique.

En utilisant le fait que la fonction $|F_\omega|^2$, ainsi que ses dérivées partielles de tous ordres sont intégrables, on obtient facilement que la série définissant η_ω est uniformément convergente sur tout compact et donc sa somme est continue (cf. [**17**]). L'égalité (3.6) est donc réalisée pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

D'autre part, pour tout système $\mathcal{D}$ de représentants de $\mathbb{Z}^d/B\mathbb{Z}^d$, la fonction η_ω vérifie pour $\mathbb{P}$-presque tout ω la propriété d'invariance:

$$\eta_\omega(x) = \sum_{\tau \in \mathcal{D}} u(B^{-1}(x+\tau), \omega_1) \eta_{\theta\omega}(B^{-1}(x+\tau)),$$

et nous avons (comme dans 2.9) la condition de normalisation:

$$\sum_{\tau\in\mathcal{D}} u(B^{-1}(x+\tau),j) = 1,\ \forall j\in I,\ \forall x\in\mathbb{R}^d.$$

Soient μ la probabilité uniforme sur I et $\mathbb{P}$ la probabilité produit $\otimes_{\mathbb{N}^*}\mu$ sur Ω. Posons, pour $x\in\mathbb{R}^d$,

$$u(x) = \frac{1}{cardI}\sum_{j\in I} u(x,j),$$

$$\eta(x) = \int_\Omega \eta_\omega(x)\ \mathbb{P}(d\omega);$$

$$F(x) = \left(\int_\Omega |F_\omega(x)|^2\mathbb{P}(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons, pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, les relations (3.7) suivantes:

i) $\eta(x) = P_u\eta(x)$;

ii) $|F(x)|^2 = u(B^{-1}x)\left|F(B^{-1}x)\right|^2$, et par suite

$$|F(x)|^2 = |F(0)|^2\prod_{k=1}^{\infty} u(B^{-k}x),$$

avec

$$F(0) = \left(\int_\Omega m(Q(\omega))^2\mathbb{P}(d\omega)\right)^{1/2};$$

iii)

$$\begin{aligned}\eta(x) &= |F(0)|^2\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}\prod_{k=1}^{\infty} u(B^{-k}(x+\gamma))\\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}\left(\int_\Omega m[(Q(\omega)-\gamma)\cap Q(\omega)]\mathbb{P}(d\omega)\right)e^{2i\pi\langle\gamma,x\rangle}.\end{aligned}$$

III.6

Supposons que B laisse invariant un sous-réseau $\Lambda = M^*\mathbb{Z}^d$ de $\mathbb{Z}^d$, M étant à coefficients entiers, avec $|\det(M)|>1$.

Il existe un système $\mathcal{S}=\{s_1,\dots,s_q\}$, avec $s_1=0$, de représentants de $\Lambda/B\Lambda$ dans Λ, avec $q=|\det(A)|$. En effet, la matrice $(M^*)^{-1}BM^*$ est de déterminant q, à coefficients entiers, car elle envoie $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{Z}^d$.

On peut alors prendre comme système S la famille $\{M^*\theta_1, \ldots, M^*\theta_q\}$, où $\{\theta_1, \ldots, \theta_q\}$ est une famille de représentants de $\mathbb{Z}^d$ modulo

$$(M^*)^{-1}BM^*\mathbb{Z}^d.$$

Sur l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ qui sont Λ-invariantes, on définit un opérateur P_u^Λ par:

$$P_u^\Lambda f(x) = \sum_{s \in \mathcal{S}} u(B^{-1}(x+s))f(B^{-1}(x+s)).$$

Cet opérateur ne dépend pas du choix des représentants de $\Lambda/B\Lambda$.

Pour une fonction u qui est seulement Λ-périodique et non pas $\mathbb{Z}^d$-périodique, la théorie des fermés Λ-périodiques invariants pour l'opérateur P_u^Λ (nous parlerons des fermés Λ-périodiques invariants pour (B, u, Λ)) est identique à celle des fermés $\mathbb{Z}^d$-périodiques invariants pour un opérateur P_u associé à une fonction u $\mathbb{Z}^d$-périodique. Il suffit, pour le voir, de se ramener au cas de $\mathbb{Z}^d$ par un changement de base.

Dans ce contexte, la variante suivante du théorème (2.8), qui utilise les notations précédentes, sera utile dans l'étude des pavages.

Théorème 3.3. ([**2**]) *S'il existe un fermé invariant Λ-périodique C différent de $\mathbb{R}^d$, alors il existe un élément x_0 de $\mathbb{R}^d$, vérifiant $B^m x_0 = x_0$* mod Λ, *pour un entier $m \geq 1$, et un sous-espace rationnel propre W de $\mathbb{R}^d$ stable par B (éventuellement réduit à $\{0\}$) tels que la réunion*

$$\bigcup_{k=0}^{m-1} (B^k x_0 + W + \Lambda)$$

soit un fermé invariant de $\mathbb{R}^d$. De plus, toute transition permise à partir d'un point de $B^k x_0 + W + \Lambda$, $1 \leq k \leq m$, mène à un point de $B^{k-1}x_0 + W + \Lambda$.

Proposition 3.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) $m(Q(\cdot)) = 1$, $\mathbb{P} - p.s.$;

ii) $g(x, \omega) = 1$, *pour $m \times \mathbb{P}$-presque tout $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \Omega$;*

iii) *pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega, \eta_\omega(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$;*

iv) *tout fermé $\mathbb{Z}^d$-périodique de $\mathbb{R}^d$ invariant pour (B, u) contient* 0.

Elles sont impliquées par la condition

v) *tout fermé Λ-périodique de $\mathbb{R}^d$ invariant pour (B, u, Λ) contient* 0.

Preuve. On a les équivalences:
i) $\Leftrightarrow$ ii), d'après (3.4),
ii) $\Leftrightarrow$ iii), d'après (3.4) et (3.6).

D'autre part, si C est un fermé $\mathbb{Z}^d$-périodique de $\mathbb{R}^d$, invariant pour le couple (B, u), ne contenant pas 0, il existe un entier L tel que

$$u(B^{-1}x)\ldots u(B^{-L}x) = 0, \ \forall x \in C,$$

puisque, dans le cas contraire, tous les points $\{B^{-k}x, k \geq 1\}$ appartiendraient à C, et par suite on aurait $0 \in C$.

Il résulte du ii) de (3.7) que $F(x) = 0$, $\forall x \in C$, et par suite

$$\eta(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} |F(x+\gamma)|^2 = 0, \ \forall x \in C,$$

puisque C est $\mathbb{Z}^d$-périodique.

D'où l'on déduit que, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, on a $\eta_\omega(x) = 0$, pour tout $x \in C$, contrairerment à iii).

Enfin, sous l'hypothèse iv), nous savons que les fonctions continues h, qui sont P_u-invariantes et $\mathbb{Z}^d$-périodiques, sont constantes. En effet, les ensembles sur lesquels h atteint son minimum et son maximum sont deux fermés invariants $\mathbb{Z}^d$-périodiques, et donc ont en commun 0. Il en résulte que la fonction η est constante.

Or nous avons, d'une part:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^d} \eta(x)dx &= \int_\Omega \int_{[0,1]^d} \eta_\omega(x)dx\mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_\Omega m(Q(\omega))\mathbb{P}(d\omega),\end{aligned}$$

d'après la relation (3.5), et d'autre part:

$$\begin{aligned}\eta(0) &= \int_\Omega \eta_\omega(0)\mathbb{P}(d\omega) \\ &\geq \int_\Omega |F_\omega(0)|^2\mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_\Omega [m(Q(\omega))]^2\mathbb{P}(d\omega).\end{aligned}$$

Comme η est constante et $m(Q(\omega)) \geq 1$, on en déduit que $m(Q(\omega)) = 1$, $\mathbb{P}$–p.s.

Pour montrer que v) implique iv), il suffit d'observer que tout fermé $\mathbb{Z}^d$-périodique invariant pour $(B, u, \mathbb{Z}^d)$ est aussi un fermé Λ-périodique invariant pour (B, u, Λ). □

III.7

Définition. Nous dirons que le couple (B, u) vérifie la condition (M) si, pour le couple (B, u), les seuls fermés invariants $\mathbb{Z}^d$-périodiques de la forme

$$\bigcup_{k=1}^{m} (B^k x_0 + W + \mathbb{Z}^d)$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $B^m x_0 = x_0$ modulo $\mathbb{Z}^d$ et W sous-espace rationnel de $\mathbb{R}^d$ stable par B, sont ceux pour lesquels W est réduit à $\{0\}$.

Nous notons Γ le plus petit sous-réseau de $\mathbb{Z}^d$, A-invariant, contenant

$$\bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{T}_j.$$

Proposition 3.5. *Si le couple (B, u) vérifie la condition (M), les translatés par Γ de $Q(\omega)$ forment un pavage de $\mathbb{R}^d$, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$.*

Preuve. D'après le lemme 3.2, il existe une matrice M à coefficients entiers, inversible, telle que $\Gamma = M\mathbb{Z}^d$.

Posons $\tilde{A} = M^{-1}AM$. Puisque $\tilde{A}\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{Z}^d$, la matrice $\tilde{A}$ est à coefficients entiers. Les résultats de III.6 vont être appliqués, non pas à B, mais à la matrice adjointe de $\tilde{A}$, c'est-à-dire à $\tilde{B} = M^* B (M^*)^{-1}$.

Appelons $\tilde{\mathcal{T}}_j$ l'ensemble $\{M^{-1}t, t \in \mathcal{T}_j\}$. Si des éléments de $\tilde{\mathcal{T}}_j$ vérifient une relation modulo $\tilde{A}\mathbb{Z}^d$, leurs images par M vérifient une relation modulo $AM\mathbb{Z}^d$, qui est donc triviale. On en déduit que $\tilde{\mathcal{T}}_j$, qui est de cardinal $q = \left|\det(\tilde{A})\right|$, est bien un système complet de représentants de $\mathbb{Z}^d/\tilde{A}\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{Z}^d$.

Nous allons montrer que les translatés par $\mathbb{Z}^d$ de l'ensemble

$$Q(\tilde{A}, (\tilde{\mathcal{T}}_j)_{1 \leq j \leq N}, \omega) = \left\{ \sum_{k \geq 1} \tilde{A}^{-k} x_k, x_k \in \tilde{\mathcal{T}}_{\omega_k}, \ \forall k \geq 1 \right\}$$

forment un pavage de $\mathbb{R}^d$, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, ce qui démontrera la proposition.

La matrice $\tilde{B}$ laisse invariant le réseau $\Lambda = M^*\mathbb{Z}^d$. Considérons la fonction $\tilde{u} = u \circ (M^*)^{-1}$, et une famille $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_q\}$, avec $s_1 = 0$, formant un système complet de représentants de $\Lambda/\tilde{B}\Lambda$ dans Λ.

Comme on l'a vu en III.6, la famille $\{(M^*)^{-1}s_1, \dots, (M^*)^{-1}s_q\}$ forme un système complet de représentants de $\mathbb{Z}^d/B\mathbb{Z}^d$.

Nous allons montrer que tout fermé invariant Λ-périodique, de $\mathbb{R}^d$ pour le triplet $(\tilde{B}, \tilde{u}, \mathcal{S})$ contient 0, ce qui, compte-tenu de la proposition 3.4, donnera le résultat voulu.

Pour cela, appliquons le théorème 3.3. Supposons qu'il existe un sous-espace V stable par B, un entier $m \geq 1$, et un point x_0 de $\mathbb{R}^d$ non entier vérifiant $x_0 = \breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m x_0$, pour des éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ de $\mathcal{S}$, tels que, pour tout $k, 1 \leq k \leq m$, on ait

$$\breve{\sigma}_k \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V + \Lambda \overset{\tilde{B},\Lambda,\tilde{u}}{\longrightarrow} \breve{\sigma}_{k-1} \dots \breve{\sigma}_m x_0 + V + \Lambda,$$

avec $\breve{\sigma}_0 = \breve{\sigma}_m$.

(La notation précédente signifie que, pour les points de l'ensemble $\breve{\sigma}_k \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V + \Lambda$, les transitions permises, au sens de $(\tilde{B}, \Lambda, \tilde{u})$, mènent nécessairement à l'ensemble $\breve{\sigma}_{k-1} \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V + \Lambda$.)

Soit $y \in (M^*)^{-1}(\breve{\sigma}_k \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V)$ et $s \in \mathcal{S}$ tel que $u(B^{-1}(y + (M^*)^{-1}s)) > 0$. Posons $z = M^*y$.

Nous avons

$$z \in \breve{\sigma}_k \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V$$

et

$$\tilde{u}((\tilde{B})^{-1}(z + s)) = u(B^{-1}(y + (M^*)^{-1}s)) > 0.$$

Il en résulte que

$$(\tilde{B})^{-1}(z + s) = M^*B^{-1}(y + (M^*)^{-1}s)) \in \breve{\sigma}_{k-1} \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V + \Lambda,$$

c'est-à-dire:

$$(B)^{-1}(y + (M^*)^{-1}s)) \in (M^*)^{-1}(\breve{\sigma}_{k-1} \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V) + \mathbb{Z}^d.$$

Nous venons ainsi de montrer que, pour tout k, $1 \leq k \leq m$, on a, pour les transitions permises au sens de $(B, \mathbb{Z}^d, u)$:

$$(M^*)^{-1}(\breve{\sigma}_k \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V) \xrightarrow{B,u} (M^*)^{-1}(\breve{\sigma}_{k-1} \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V) + \mathbb{Z}^d,$$

ce qui implique:

$$B^{k-1}(M^*)^{-1}x_0 + (M^*)^{-1}V + \mathbb{Z}^d \xrightarrow{B,u} B^{k-2}(M^*)^{-1}x_0 + (M^*)^{-1}V + \mathbb{Z}^d.$$

[Nous avons, en effet,

$$\breve{\sigma}_k \cdots \breve{\sigma}_m x_0 = \tilde{B}^{k-1}x_0 - (\sigma_{k-1} + \tilde{B}\sigma_{k-2} + \cdots + \tilde{B}^{k-2}\sigma_1)$$

avec

$$(M^*)^{-1}(\sigma_{k-1} + \tilde{B}\sigma_{k-2} + \cdots + \tilde{B}^{k-2}\sigma_1) \in \mathbb{Z}^d,$$

et en particulier

$$\begin{aligned} B^m(M^*)^{-1}x_0 &= (M^*)^{-1}\tilde{B}^m x_0 \\ &= (M^*)^{-1}(x_0 + \sigma_m + \tilde{B}\sigma_{m-1} + \cdots + \tilde{B}^{m-1}\sigma_1) \\ &= (M^*)^{-1}x_0 + \text{ un entier.}] \end{aligned}$$

La condition (M) étant vérifiée par le couple (B, u), on doit avoir: $V = \{0\}$; d'où, pour $1 \leq k \leq m$,

$$\breve{\sigma}_k \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + \Lambda \xrightarrow{\tilde{B},\Lambda,\tilde{u}} \breve{\sigma}_{k-1} \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + \Lambda.$$

Mais on a alors:

$$\tilde{u}(\breve{\sigma}_k \cdots \breve{\sigma}_m x_0) = 1, \ \forall k, 1 \leq k \leq m;$$

c'est-à-dire:

$$u(B^{k-1}(M^*)^{-1}x_0) = 1, \ \forall k, 1 \leq k \leq m.$$

Par suite, $\forall t \in \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{T}_j$, on a, $\forall k, 1 \leq k \leq m$,

$$\langle t, B^{k-1}(M^*)^{-1}x_0 \rangle \in \mathbb{Z},$$

ou encore:

$$\langle \tilde{t}, \tilde{B}^k x_0 \rangle \in \mathbb{Z}, \ \forall \tilde{t} \in \bigcup_{j=1}^{N} \tilde{\mathcal{T}}_j.$$

Ceci montre que la réunion

$$\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{\mathcal{T}}_j$$

est contenue dans un sous-réseau propre Γ', $\tilde{A}$-invariant, de $\mathbb{Z}^d$. La réunion $\bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{T}_j$ est donc contenue dans le sous-réseau propre $M\Gamma'$ de $\Gamma = M\mathbb{Z}^d$, qui est A-invariant. Ceci contredit le choix de Γ. D'où le résultat. □

IV. Existence d'un réseau

IV.1

Nous en venons maintenant au résultat principal de ce travail.

Théorème 4.1. *Soit A une matrice dilatante, à coefficients entiers, d'ordre d, et $\mathcal{T}$ un système complet de représentants de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{Z}^d$. Alors il existe un sous-réseau Γ de $\mathbb{Z}^d$, contenant $\mathcal{T}$, tel que les translatés de*

$$Q = \left\{ \sum_{k\geq 1} A^{-k} x_k \colon x_k \in \mathcal{T} \right\}$$

par les éléments de Γ forment un pavage de $\mathbb{R}^d$.

Remarque. On notera qu'en général le réseau Γ n'est pas invariant par A, mais par une autre matrice $\tilde{A}$ qui est décrite dans la remarque 4.3.

Preuve du théorème. La preuve est donnée en plusieurs étapes et se poursuit dans les sections IV.2, IV.3 et IV.4.

Nous raisonnons par récurrence sur la dimension d de la matrice A. Pour $d = 1$, le résultat, qui est connu (cf. [**7**]), se déduit comme cas particulier "déterministe" de la proposition 3.5.

Supposons le résultat démontré pour une matrice dilatante A d'ordre $< d$ et plaçons nous dans le cas où A est de dimension $d \geq 2$. Posons

$$u(x) = \left| \frac{1}{\det(A)} \sum_{t\in\mathcal{T}} e^{2\pi i\langle x,t\rangle} \right|^2.$$

Si le couple (B, u) vérifie la condition (M) de III.7, alors la proposition 3.5 prouve le résultat.

Supposons maintenant qu'il existe un sous-espace rationnel W de $\mathbb{R}^d$, invariant par B, un point $z_0 \in \mathbb{R}^d$ et un entier $m \geq 1$ vérifiant

$B^m z_0 = z_0$ modulo $\mathbb{Z}^d$, tel que, pour tout $1 \leq k \leq m$, on ait

$$B^k z_0 + W + \mathbb{Z}^d \xrightarrow{B,u} B^{k-1} z_0 + W + \mathbb{Z}^d.$$

Parmi les sous-espaces vérifiant ces conditions, nous pouvons choisir un sous-espace rationnel W de dimension maximale $r, 1 \leq r < d$.

IV.2 Réduction du problème

Le résultat suivant permet d'effectuer une réduction du problème.

Lemme 4.2. *Soit W un sous-espace rationnel de dimension r dans $\mathbb{R}^d$. Il existe un changement de base, dont la matrice de passage P est à coefficients entiers et de déterminant 1, tel que les r premiers vecteurs de la nouvelle base forment une base de W.*

Preuve. Ce résultat classique peut être montré par l'argument élémentaire suivant.

Il existe dans W une base formée de r vecteurs $v_1, \ldots, v_r$, dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^d, (a_1^j, \ldots, a_d^j), j = 1, \ldots, r$, sont des entiers. Quitte à diviser v_1 par un scalaire, on peut supposer que les coordonnées de $v_1, (a_1^1, \ldots, a_d^1)$, sont des entiers premiers entre eux.

Par applications répétées de la relation de Bezout (en prenant les composantes deux à deux), on peut construire un produit M de matrices dans $SL(d, \mathbb{Z})$ tel que $M(a_1^j, \ldots, a_d^j) = (1, 0, \ldots, 0)$.

Notons $(b_1^j, \ldots, b_d^j) = M(a_1^j, \ldots, a_d^j), j = 1, \ldots, r$. En remplaçant les vecteurs $v_j - b_1^j v_1$, on se ramène au cas d'une base de W, telle que l'image par M des $r-1$ derniers vecteurs a une première composante nulle. Quitte à diviser par un scalaire, on peut de plus supposer que les coefficients de l'image du deuxième vecteur sont des entiers premiers entre eux. On est ainsi ramené à une dimension inférieure.

On peut donc, par l'application de matrices dans $SL(d, \mathbb{Z})$, réduire successivement les coordonnées des vecteurs v_i, pour $i = 1, \ldots, r$, à la forme $\delta_{i,j}, \ j = 1, \ldots, d$. □

En utilisant le lemme 4.2, on peut se ramener, en conjuguant par une matrice dans $SL(d, \mathbb{Z})$, au cas où W est de la forme $W = \mathbb{R}^r \times \{0\}$

et où A a la forme suivante:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{pmatrix},$$

pour des matrices A_1 et A_2 de dimension respectivement r et $d-r$.

La matrice $B = A^*$ s'écrit alors

$$B = \begin{pmatrix} A_1^* & C^* \\ 0 & A_2^* \end{pmatrix}.$$

IV.3 Propriétés de la famille $\mathcal{T}$

Nous allons voir que la forme de A^* implique pour la famille $\mathcal{T}$ des propriétés particulières.

Posons $q_i = |\det A_i|, i = 1, 2$, et $q = |\det A| = q_1 q_2$, et écrivons tout élément z de $\mathbb{R}^d$ sous la forme $z = (z_1, z_2)$ avec $z_1 \in \mathbb{R}^r$ et $z_2 \in \mathbb{R}^{d-r}$. Nous avons

$$u(z) = u(z_1, z_2) = \frac{1}{q^2} \sum_{d,d' \in \mathcal{T}} \exp\left(2i\pi(\langle d_1 - d_1', z_1\rangle_r + \langle d_2 - d_2', z_2\rangle_{d-r})\right).$$

Considérons la fonction $\bar{u}$ sur $\mathbb{R}^{d-r}$ définie par

$$\bar{u}(y) = q_1 \int_{[0,1]^r} u(w, y)\, dw, y \in \mathbb{R}^{d-r}.$$

Nous avons:

$$\bar{u}(y) = \frac{1}{q_1 q_2^2} \sum_{d,d' \in \mathcal{T}} \left(\int_{[0,1]^r} \exp(2i\pi\langle d_1 - d_1', w\rangle_r)\, dw\right) \exp(2i\pi\langle d_2 - d_2', y\rangle_{d-r}).$$

Or l'intégrale est nulle, sauf si $d_1 = d_1'$; d'où:

$$\bar{u}(y) = \frac{1}{q_1 q_2^2} \sum_{\{d,d' \in \mathcal{T} : d_1 = d_1'\}} \exp(2i\pi\langle d_2 - d_2', y\rangle_{d-r}).$$

D'autre part, l'égalité

$$1 = \sum_{\tau \in \mathcal{D}} u\left(B^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] + \tau\right)\right),$$

vraie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{d-r}$ et tout choix de système de représentants $\mathcal{D}$ de $\mathbb{Z}^d / B\mathbb{Z}^d$ entraîne,

$$1 = \int_{[0,1]^r} \sum_{\tau \in \mathcal{D}} u\left(B^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix} x + A_1^* w \\ y \end{pmatrix}\right] + \tau\right)\right) dw, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{d-r}.$$

Choisissons un système de représentants de la forme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, où D_1 est un système de représentants de $\mathbb{Z}^r/A_1^*\mathbb{Z}^r$ dans $\mathbb{Z}^r$, et $\mathcal{D}_2$ un système de représentants de $\mathbb{Z}^{d-r}/A_2^*\mathbb{Z}^{d-r}$ dans $\mathbb{Z}^{d-r}$.

On obtient

$$\begin{aligned}1 = & \sum_{\tau_1 \in \mathcal{D}_1, \tau_2 \in \mathcal{D}_2} \int_{[0,1]^r} u(A_1^{*^{-1}} x + A_1^{*^{-1}} \tau_1 - \\ & \qquad - A_1^{*^{-1}} C^* A_2^{*^{-1}} (y+\tau_2) + w, A_2^{*^{-1}}(y+\tau_2))\, dw \\ = & \sum_{\tau_1 \in \mathcal{D}_1, \tau_2 \in \mathcal{D}_2} \int_{[0,1]^r} u(w, A_2^{*^{-1}}(y+\tau_2))\, dw \\ = & \sum_{\tau_2 \in \mathcal{D}_2} q_1 \int_{[0,1]^r} u(w, A_2^{*^{-1}}(y+\tau_2))\, dw;\end{aligned}$$

soit

$$1 = \sum_{\tau_2 \in \mathcal{D}_2} \bar{u}(A_2^{*^{-1}}(y+\tau_2)).$$

Pour $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{d-r}$, on a, $\forall k, 0 \le k \le m-1$,

$$A_2^{*^k} y_0 + \mathbb{Z}^{d-r} \xrightarrow{A_2^*, \bar{u}} A_2^{*^{(k-1)}} y_0 + \mathbb{Z}^{d-r}.$$

On en déduit que $\bar{u}(A_2^{*^k} y_0) = 1, \forall k, 0 \le k \le m-1$, c'est-à-dire:

$$\frac{1}{q_1 q_2^2} \sum_{d, d' \in \mathcal{T} : d_1 = d'_1} \exp(2i\pi \langle d_2 - d'_2, A_2^{*^k} y_0 \rangle) = 1. \tag{4.1}$$

Or l'ensemble $\{(d, d') \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} : d_1 = d'_1\}$ est inclus dans l'ensemble $\{(d, d') \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} : d_1 - d'_1 \in A_1\mathbb{Z}^r\}$ dont le cardinal est $q_1 q_2^2$. L'égalité (4.1) entraîne alors que tous les éléments $d, d' \in \mathcal{T}$, tels que $d_1 - d'_1 \in A_1\mathbb{Z}^r$, vérifient:

1) $d_1 = d'_1$.
2) $\langle d_2 - d'_2, A_2^{*^k} y_0 \rangle \in \mathbb{Z}, \ \forall k, 0 \le k \le m-1$.

En résumé, nous avons montré que les éléments de $\mathcal{T}$ sont nécessairement de la forme suivante:

$$\mathcal{T} = \left[\begin{pmatrix} r_i \\ \eta_{i,j} \end{pmatrix} \right], 1 \le i \le q_1, \ 1 \le j \le q_2,$$

où:

1) $\mathcal{T}_1 = (r_i)_{1 \leq i \leq q_1}$ forme un système de représentants de $\mathbb{Z}^r/A_1\mathbb{Z}^r$ dans $\mathbb{Z}^r$;
2) pour tout $1 \leq i \leq q_1$, la famille $\mathcal{T}_{2,i} = (\eta_{i,j})_{1 \leq j \leq q_2}$ forme un système de représentants de $\mathbb{Z}^{d-r}/A_2\mathbb{Z}^{d-r}$ dans $\mathbb{Z}^{d-r}$.

IV.4

L'hypothèse de récurrence appliquée à la matrice A_1 assure l'existence d'un réseau Γ_1 de $\mathbb{Z}^r$ tel que les translatés par Γ_1 de

$$Q_1 = \{\sum_{k \geq 1} A_1^{-k} r_{\epsilon_k} : \forall k \geq 1, \epsilon_k \in \{1, \ldots, q_1\}\}$$

forment un pavage de $\mathbb{R}^r$. Soit m_r la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^r$ et désignons par λ la mesure de probabilité

$$\lambda(\cdot) = \frac{m_r(\cdot \cap Q_1)}{m_r(Q_1)}.$$

Il existe un borélien X de Q_1, de λ-mesure 1 tel que tout $x \in X$ s'écrive de façon unique:

$$x = \sum_{k \geq 1} A_1^{-k} r_{\epsilon_k}(x), \text{ avec } \forall k \geq 1, \epsilon_k \in \{1, \ldots, q_1\}.$$

Le problème est maintenant de trouver un réseau Γ_2 de $\mathbb{R}^{d-r}$ satisfaisant à la condition suivante: pour tout $z = (x, y) \in \mathbb{R}^d$, il existe des suites $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ et $(j_k)_{k \geq 1}$, avec $\epsilon_k \in \{1, \ldots, q_1\}$ et $j_k \in \{1, \ldots, q_2\}$ et des éléments $\gamma_1 \in \Gamma_1$, $\gamma_1 \in \Gamma_2$ tels que:

$$x = \sum_{k \geq 1} A_1^{-k} r_{\epsilon_k} + \gamma_1,$$
$$y = \sum_{k \geq 1} D_k r_{\epsilon_k} + \sum_{k \geq 1} A_2^{-k} \eta_{\epsilon_k, j_k} + \gamma_2$$

où

$$D_k = -\sum_{\ell=0}^{k-1} A_2^{-(\ell+1)} C A_1^{-(k-\ell)}.$$

Soit $\Omega = \{1, \ldots, q_1\}^{\mathbb{N}^*}$. Appelons μ la loi uniforme sur $I = \{1, \ldots, q_1\}$ et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité produit $\otimes_{\mathbb{N}^*} \mu$ sur Ω.

Par l'hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe

$$\gamma_1 \in \Gamma_1 \text{ et } (\epsilon_k(x))_{k \geq 1} \in \Omega$$

tels que

$$x = \sum_{k\geq 1} A_1^{-k} r_{\epsilon_k(x)} + \gamma_1.$$

On est donc ramené au problème suivant: trouver un réseau Γ_2 de $\mathbb{R}^{d-r}$ tel que, pour m-presque tout $x \in X$, les translatés par Γ_2 de l'ensemble

$$\left\{ \sum_{k\geq 1} A_2^{-k} \eta_{\epsilon_k(x),j_k}, 1 \leq j_k \leq q_2,\ \forall k \geq 1 \right\}$$

forment un pavage de $\mathbb{R}^{d-r}$. On peut dans ce qui précède, remplacer "m-presque tout $x \in X$" par "$\mathbb{P}$-presque tout $\epsilon \in \Omega$", et la suite $(\epsilon_k(x))$ par $\epsilon = (\epsilon_k) \in \Omega$.

En effet, définies sur l'espace probabilisé $(X, \mathcal{B}(X), \lambda)$, les variables aléatoires $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $\{1, \ldots, q_1\}$, puisque, pour tout $n \geq 1$ et tout $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, q_1\}^n$, nous avons:

$$\begin{aligned}
\lambda(\{x \in X \colon \epsilon_1(x) = i_1, \ldots, \epsilon_n(x) = i_n\}) &= \lambda(\{x \colon A_1^n x \in Q_1 + r_{i_n} + \\
&\qquad + \cdots + A_1^{n-1} r_{i_1}\} \\
&= \frac{1}{q_1^n} \lambda(Q_1 + r_{i_n} + \cdots + A_1^{n-1} r_{i_1}) \\
&= \frac{\lambda(Q_1)}{q_1^n} = \frac{1}{q_1^n}.
\end{aligned}$$

Posons, pour $\omega \in \Omega$:

$$Q_2(A_2, \omega) = \left\{ \sum_{k\geq 1} A_2^{-k} \gamma_k,\ \forall k \geq 1,\ \gamma_k \in \mathcal{T}_{2,\omega_k} \right\}.$$

Pour tout $1 \leq j \leq q_1$, notons

$$u(y, j) = \left| \frac{1}{q_2} \sum_{\gamma \in \mathcal{T}_{2,j}} \exp(2\pi i \langle \gamma, y \rangle) \right|^2, y \in \mathbb{R}^{d-r}.$$

Nous avons

$$\frac{1}{q_1} \sum_{j=1}^{q_1} u(y, j) = \bar{u}(y).$$

Montrons que le couple $(A_2, \bar{u})$ vérifie la condition (M) de III.7.

Soit V un sous-espace vectoriel rationnel de $\mathbb{R}^{d-r}$, y_1 un élément de $\mathbb{R}^{d-r}$ et p une entier ≥ 1 vérifiant: $A_2^{*p} y_1 = y_1$, modulo $\mathbb{Z}^{d-r}$ tels que l'on ait, $\forall k$, $1 \leq k \leq p$,

$$A_2^{*k} y_1 + V + \mathbb{Z}^{d-r} \stackrel{A_2^*, \bar{u}}{\longrightarrow} A_2^{*(k-1)} y_1 + V + \mathbb{Z}^{d-r}.$$

Soit x_1 l'élément de $\mathbb{R}^r$ défini par

$$x_1 = (I - A_1^{*p})^{-1} \left[\sum_{k=0}^{p-1} A_1^{*k} C^* A_2^{*p-1-k} y_1 \right].$$

On vérifie facilement que

$$B^p \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \text{ modulo} \mathbb{Z}^d,$$

et, $\forall k, 1 \leq k \leq p$,

$$B^k(x_1, y_1) + \mathbb{R}^r \times V + \mathbb{Z}^d \stackrel{A^*, u}{\longrightarrow} B^{k-1}(x_1, y_1) + \mathbb{R}^r \times V + \mathbb{Z}^d.$$

Le sous-espace vectoriel W étant choisi de dimension maximale r, cette propriété implique que $V = \{0\}$ et le couple $(A_2, \bar{u})$ vérifie la condition (M).

Appelons Γ_2 le plus petit réseau de $\mathbb{Z}^{d-r}$, A_2-invariant contenant chacune des familles de représentants $\mathcal{T}_{2,j}, j = 1, \dots, q_1$. D'après la proposition 3.5, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega = \{1, \dots, q_1\}^{\mathbb{N}^*}$, les translatés de $Q_2(A_2, \omega)$ par Γ_2 forment un pavage de $\mathbb{R}^{d-r}$ et Γ_2 vérifie la condition voulue. □

Remarque 4.3. Si l'on peut choisir pour Γ_1 le plus petit réseau A_1-invariant contenant $\mathcal{T}_1$, le réseau $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, obtenu pour le pavage, n'est autre que le plus petit réseau $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$-invariant contenant $\mathcal{T}$.

Dans le cas contraire, on peut faire une étude analogue pour le couple $(A_1, \mathcal{T}_1)$, et recommencer si nécessaire. Finalement, on obtient que l'on peut écrire, à conjugaison près par une matrice entière de déterminant 1, la matrice A sous la forme:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ * & A_2 & (0) \\ \cdots & \cdots & \\ * & & A_s \end{pmatrix}$$

avec $\dim A_i = r_i$ et $\sum_{i=1}^{s} r_i = d$, et on a:

$$\mathcal{T} = \{(t_{1,i_1}, t_{2,i_1,i_2}, \dots, t_{s,i_1,i_2,\dots,i_s}) \in \mathbb{R}^{r-s}\},$$

avec les propriétés suivantes:
$\mathcal{T}_1 = \{t_{1,i_1}, 1 \leq i_1 \leq r_1\}$ est un système complet de représentants de $\mathbb{Z}^{r_1}/A_1\mathbb{Z}^{r_1}$;
$\mathcal{T}_{2,i_1} = \{t_{2,i_1,i_2}, 1 \leq i_2 \leq r_2\}$ est un système complet de représentants de $\mathbb{Z}^{r_2}/A_2\mathbb{Z}^{r_2}$, pour chaque $i_1, 1 \leq i_1 \leq r_1$;
$\vdots$
$\mathcal{T}_{s,i_1,\dots,i_{s-1}} = \{t_{s,i_1,\dots,i_{s-1},i_s}, 1 \leq i_s \leq r_s\}$ est un système complet de représentants de $\mathbb{Z}^{r_s}/A_s\mathbb{Z}^{r_s}$, pour chaque $s-1$-uplet $(i_1, \dots, i_{s-1}) \in \{1, \dots, r_1\} \times \cdots \times \{1, \dots, r_{s-1}\}$.

Le réseau permettant d'obtenir le pavage est alors le plus petit sous-réseau de $\mathbb{Z}^d$, contenant $\mathcal{T}$, invariant par la matrice

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & (0) \\ (0) & \cdots & \\ & & A_s \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[1] Brandt, C.: *Self-similar sets 5. Integer matrices and fractal tilings of* $\mathbb{R}^n$. Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 549–562.

[2] Cerveau, D., Conze, J.-P. et Raugi, A.: *Ensembles invariants pour un opérateur de transfert dans* $\mathbb{R}^d$. Prétirage, 1995.

[3] Cohen, A.: *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal.* Masson, 1992.

[4] Conze, J.-P. et Raugi, A.: *Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications.* Bull. Soc. Math. France **118** (1990), 273–310.

[5] Daubechies, I.: *Orthonormal basis of compactly supported wavelets.* Comm. in pure and appl. math. **XLI** (7) (1988), 909–996.

[6] Daubechies, I.: *Ten lectures on wavelets.* CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics, SIAM, 1992.

[7] Gröchenig, K. and Haas, A.: *Self-similar lattice tilings.* J. Fourier Anal. et Appl. **1** (1994), 131–170.

[8] Gröchenig, K. and Madych, W. R.: *Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings.* IEEE Trans. Inform. Th. **38** (2), (1992), 556–568.

[**9**] Hennion, H.: *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens.* Proc. A.M.S. **118** (1993), 627–634.

[**10**] Hervé, L.: *Etude d'opérateurs quasi-compacts et positifs, applications aux opérateurs de transfert.* Ann. Inst. H. Poincaré, Proba. et Statist. **30** (3), (1994), 437–466.

[**11**] Hervé, L.: *Construction et régularité des fonctions d'échelle.* SIAM J. Math. Analysis, **26** (5), (1995), 1361–1385.

[**12**] Kenyon, R.: *Self-replicating tilings.* Ph.D. Thesis, 1990, Princeton University.

[**13**] Lagarias, J.C. and Wang, Y.: *Integral self-affine tiles in* $\mathbb{R}^n$. A paraître dans J. London Math. Soc.

[**14**] Lagarias, J.C. and Wang, Y.: *Integral self-affine tiles in* $\mathbb{R}^n$. II (prétirage).

[**15**] Lawton, W.: *Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelets.* J. Math. Phys. **32** (1991), 52–61.

[**16**] Mallat, S.: *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases 69–88.*

*[**17**] Meyer, Y.: Ondelettes et Opérateurs. Hermann, 1990.*

*[**18**] Strichartz, R.: Wavelets and self-affine tilings. Const. Approx.* **9** *(1993), 327–346.*

J.-P. Conze, L. Hervé et A. Raugi
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042, Rennes Cedex
France